Exponentielle d'une matrice

Données : $(E, \|\cdot\|)$ un evn (sur $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) de dim finie $\|\cdot\|$ est la norme d'algèbre associée.

I Généralités, propriété fonctionnelle

A) Calcul opérationnel :

Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon $R > 0$

HP Th : a) Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ tq $|||u||| < R$, $\sum a_n u^n$ est une série absolument CV.

b) La fonction $f : \begin{cases} B_{|||\cdot|||}(0,R) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \longmapsto f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \end{cases}$ est $\mathcal{C}^0$

D/ a) $\forall n \in \mathbb{N}$ $|||a_n u^n||| \leq |a_n| \, |||u|||^n$ car $|||u^n||| \leq |||u|||^n$

or $|||u||| < R$ d'où la CVA, et la CV en DF

$\Big\{ |||f(u)||| \leq \sum |a_n| \, |||u|||$

b) On fixe $u_0 \in B(0,R)$; puis ρ $|||u_0||| < \rho < R$

Pour tout $u \in \overline{B}(0,\rho)$, et tout $n \in \mathbb{N}$ il vient $|||a_n u^n||| \leq |a_n| \rho^n$

donc $\sum a_n u^n$ CVN sur $\overline{B}(0,\rho)$, f est donc $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{B}(0,\rho)$

et $\overline{B}(0,\rho) \in \mathcal{V}(u)$ car $|||u_0||| < \rho$

Ex 1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, On suppose $\rho(u) < R$, Mq $\sum a_n u^n$ CV

$\max(|\lambda + 1|, |\lambda + 1|) \rightarrow$ vp de u

~~trigo~~/diago à ε près

S/ Soit $\varepsilon > 0$, par diagonalisation à ε près, il existe $\|\cdot\|$ sur E tq $|||u||| < \rho(u) + \varepsilon$

On choisit alors ε tq $\rho(u) + \varepsilon < R$

2) $f = \sum a_n z^n$ $\rho(f) = R$ | On suppose $|||u||| < R$, Mq
$g = \sum b_n z^n$ $\rho(g) = R$ | $f(u) \circ g(u) = (fg)(u)$

BL

S/ On pose $r = |||u|||$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $c = a * b$ (prod de coco)

$$\left|\left|\left| \sum_{k=0}^{n} a_k u^k \circ \sum_{k=0}^{n} b_k u^k - \sum_{j=0}^{n} c_j u^j \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq n \\ k+\ell > n}} a_k b_\ell u^{k+\ell} \right|\right|\right|$$

$$\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \leq \ell \leq n \\ k+\ell > n}} |a_k| |b_\ell| r^{k+\ell} = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| r^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} |b_k| r^k\right) - \sum_{j=0}^{n} \tilde{c}_j r^j \longrightarrow \text{produit de coco}$$

où $\tilde{c} = (|a_k|) * (|b_\ell|)$

Th-déf On appelle exponentielle de $u \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$, $\exp(u)$ est bien définie sur $\mathcal{L}(E)$ et $u \mapsto \exp(u)$ est $\mathcal{C}^0$ (NB $|||e^u||| \leq e^{|||u|||}$)

D/ (f A) ex pers : le démontrer

Th : (Pr - admis) Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, si $u \circ v = v \circ u$, on a

$e^{u+v} = e^u e^v$ (*)

Conséquence $e^u e^{-u} = Id$.

Ex Montrer directement ce qui précède (*)

$$\left|\left|\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \circ \sum_{\ell=0}^{n} \frac{v^\ell}{\ell!} - \sum_{j=0}^{n} \frac{(u+v)^j}{j!} \right|\right|\right| = \left|\left|\left| \sum_{\substack{k+\ell > n \\ 0 \leq k, \ell \leq n}} \frac{u^k v^\ell}{k! \ell!} \right|\right|\right| \leq \sum_{\substack{k+\ell > n \\ k, \ell \leq n}} \frac{|||u|||^k |||v|||^\ell}{k! \ell!}$$

NB $\sum_{k+\ell=j} \frac{u^k \circ v^\ell}{k! \ell!} = \frac{1}{j!} \cdot \sum_{k+\ell=j} \frac{j!}{k! \ell!} u^k v^\ell = \frac{1}{j!} (u+v)^j$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{|||u|||^k}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \frac{|||v|||^\ell}{\ell!}}_{\longrightarrow e^{|||u|||} e^{|||v|||}} - \underbrace{\sum_{j=0}^{n} \frac{(|||u||| + |||v|||)^j}{j!}}_{\longrightarrow e^{|||u||| + |||v|||}} \longrightarrow 0$$

Ex Mq $\left(I_E + \frac{u}{n}\right)^n \longrightarrow e^u$

S/ ① Weierstrass ou encore ü

$$\left\| e^u - \left(I_E + \frac{u}{n}\right)^n \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) u^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u^k}{k!} \right\| \quad r = \|u\|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_n^k}{n^k}\right) r^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} r^k/k!$$

$$= e^r - \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \longrightarrow 0$$

II Propriétés géométriques (HP)

géométrie fnt

On note $\|\cdot\|$ la norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$.

Ex Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mq $\exp A$ est un polynôme en A

D/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$. Or $\mathbb{C}[A]$ est de dim finie

sev fermé → et c'est un sev : il est donc fermé : $\exp A = \lim_{n \to +\infty} \sum \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$

Prop : Soit $(A, P) \in GL_n(\mathbb{C})$ $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp A \, P$

D/ $\sum_{k=0}^{n} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = P^{-1} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} P$ or $M \mapsto PMP^{-1}$ est $\mathcal{C}^0$ (linéarité)

Th Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$

ⓐ Si $\mathrm{spec}(A) = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\mathrm{spec}(e^A) = (e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_d})$

ⓑ $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$ (on retrouve e^A inversible)

D/ ⓐ $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_d \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad e^A = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & * \\ 0 & e^{\lambda_d} \end{pmatrix} P^{-1}$

Prop : ① A D $\mathbb{Z}$ alors e^A unsx

② A nilpotente $e^A = I + \left(A + \frac{A^2}{2!} + \dots + \frac{A^{d-1}}{(d-1)!}\right)$ unipotente (I + Nil)

③ ~~Trouver $A \in GL_2(\mathbb{R})$ tq $\det A > 0$~~ et si $A \in M_n(\mathbb{R})$ $\det e^A > 0$

Exercice 1) Trouver $A \in GL_2(\mathbb{Z})$ tq $\det A > 0$ et $A \notin \exp(M_2(\mathbb{R}))$

I/ $i = \begin{pmatrix} & \\ -1 & \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ | $e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta^2/2 & 0 \\ 0 & -\theta^2/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta^3/6 \\ -\theta^3/6 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} (-1)^k \theta^{2k} & 0 \\ 0 & (-1)^k \theta^{2k} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \theta^{2k+1} \\ (-1)^k \theta^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$

$e^A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Note : $z = a + ib$ " = " $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$e^z = e^a e^{ib} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ si B est une matrice réelle

i) B a son spectre réel, $B \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$e^B \simeq \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\mu \end{pmatrix}$ non.

$B \simeq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N$, $e^B \simeq \exp(\lambda I + N) = \exp(\lambda I) \exp N$

$= e^\lambda (I + N)$ non

ii) $\operatorname{spec} B \subset \mathbb{C}$, $\operatorname{spec}(B) = \{\lambda, \bar\lambda\}$ $\lambda \neq \bar\lambda$, $\lambda = \mu + i\nu$, $\nu \neq 0$

$\operatorname{spec}(e^B) = (e^\mu e^{i\nu}, e^\mu e^{-i\nu}) \neq (-1, -4)$

$|-1| \neq |-4|$

$\bar{x} + \bar{F}$

$cn^- = x$

② Soit $A \in M_d(\mathbb{C})$ Mq A DZ $\Leftrightarrow$ e^A DZ ($\Leftarrow$) D'après

$A = D + N \quad e^A = e^D e^N = e^D(I + N')$, $N' = \sum_{k=1}^{d-1} \frac{N^k}{k!}$

$= e^D + e^D N'$

$[N, D] = 0 \underset{\text{passage à la limite et } e^\circ \text{ des opérations}}{\Longrightarrow} [e^D, N'] = 0 \Rightarrow N'' = e^D N'$ est nilp

$e^N = I$

Puisque e^A est DZ il vient $e^D N' = 0$ donc $N' = 0$

On veut $N = 0$? si $N \neq 0$

Soit p l'indice de nilpotence de N, soit X $\begin{cases} NX \neq 0 \\ N^2X = 0 \end{cases}$ $X = N^{p-2}y$ $\neq 0$ — justif

Nilp $\Rightarrow$ dire ng 1

il vient $N'X = NX \neq 0$ absurde

Ex Mq $\exp(M_d(\mathbb{C})) = GL_d(\mathbb{C})$

D/ Soit $A \in GL_d(\mathbb{C})$

D) $A = I + N \quad N$ nilp

On va mq $A = \exp N'$ où $N' = \underbrace{N - \frac{N^2}{2} + \dots + (-1)^{d-2} \frac{N^{d-1}}{d-1}}_{\ln(I+N)}$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^d x^d}{d} + o(x^{d+1})$

$e^y - 1 = y + \frac{y^2}{2!} + \dots + \frac{y^d}{d!} + o(y^{d+1})$

$y = \ln(1+x) \quad e^{\ln(1+x)} - 1 = Q(P(x)) + O\left(\left(\ln(1+x)\right)^{d+1}\right)$

<u>Bref</u>: $\underbrace{Q(P(x)) - x}_{\text{polynôme}} = O(x^{d+1})$

$$Q(P(x)) - x = x^{d+1} \underbrace{R(x)}_{\text{pol}}$$

$$Q(P(N)) - N = 0 \quad \text{or } P(N)^d = 0 \text{ (nilp)}$$

$$e^{N'} - I - N = 0$$

(CCP) $I + N = \exp(N')$ où N' est un polynôme en N

<u>FIN</u> : $A = D + N$: $D = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$ $\quad [D, N] = 0$

$$A = D\left(I + \underbrace{D^{-1}N}\right)$$

nilp car $[D,N] = 0$

$$= e^{\Delta} e^{N'} \qquad N' \text{ pol en } D^{-1}N$$

On choisit $\Delta = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} = F(D)$ où $F \in \mathbb{C}[X]$

$F(\lambda_i) = \mu_i \quad i = 1 \dots n$

$(\lambda_i = \lambda_j$, on impose $\mu_i = \mu_j)$

alors $[\Delta, N'] = 0$ donc $e^{\Delta} e^{N'} = e^{\Delta + N'}$